

# Cours sur les suites de Fibonacci

Niveau : Terminale / L1 universitaire

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Définition et premiers exemples</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Propriétés élémentaires</b>	<b>2</b>
2.1	Positivité et croissance . . . . .	2
2.2	Encadrement grossier : croissance exponentielle . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Expression explicite : formule de Binet</b>	<b>3</b>
3.1	Équation caractéristique . . . . .	3
3.2	Forme générale des solutions . . . . .	3
3.3	Formule de Binet . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Rapport de deux termes consécutifs et nombre d'or</b>	<b>4</b>
4.1	Limite du rapport $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ . . . . .	4
4.2	Caractérisation de $\varphi$ . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Identités classiques de Fibonacci</b>	<b>5</b>
5.1	Formule d'addition . . . . .	5
5.2	Somme des $n$ premiers termes . . . . .	5
5.3	Identité de Cassini . . . . .	6
<b>6</b>	<b>Interprétations combinatoires</b>	<b>6</b>
6.1	Mots binaires sans deux 1 consécutifs . . . . .	6
6.2	Carrelages d'un segment . . . . .	7
<b>7</b>	<b>Fonction génératrice</b>	<b>7</b>
7.1	Définition . . . . .	7
7.2	Calcul de la fonction génératrice . . . . .	8
<b>8</b>	<b>Représentation matricielle</b>	<b>8</b>
8.1	Formulation matricielle . . . . .	8
<b>9</b>	<b>Exercices proposés</b>	<b>9</b>

## 1 Définition et premiers exemples

### Définition 1.1 : Suite de Fibonacci

On appelle **suite de Fibonacci** la suite réelle  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ainsi, chaque terme (à partir du troisième) est la somme des deux termes précédents.

### Exemple 1.1 : Premiers termes

Calculons les premiers termes de la suite :

$$\begin{aligned}F_0 &= 0, \\F_1 &= 1, \\F_2 &= F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1, \\F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, \\F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3, \\F_5 &= F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5, \\F_6 &= F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8, \\F_7 &= F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13, \\F_8 &= F_7 + F_6 = 13 + 8 = 21, \text{ etc.}\end{aligned}$$

On obtient donc la suite :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

### Remarque

La suite de Fibonacci est un exemple typique de **suite récurrente linéaire d'ordre 2** :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

## 2 Propriétés élémentaires

### 2.1 Positivité et croissance

#### Proposition 2.1 : Positivité

Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $F_n \geq 1$ .

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n$ .

*Initialisation :* Pour  $n = 1$ ,  $F_1 = 1 \geq 1$ . Pour  $n = 2$ ,  $F_2 = 1 \geq 1$ .

*Hérédité :* Supposons qu'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $F_n \geq 1$  et  $F_{n+1} \geq 1$ . Alors

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \geq 1 + 1 = 2 \geq 1.$$

Ainsi, par récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n \geq 1$ . □

#### Proposition 2.2 : Croissance

La suite  $(F_n)_{n \geq 1}$  est strictement croissante à partir d'un certain rang.

*Démonstration.* On vérifie d'abord les premiers termes :

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \dots$$

On remarque que dès  $n \geq 2$ , on a  $F_{n+1} > F_n$ .

On le montre par récurrence forte à partir de  $n = 2$ . Pour  $n = 2$ ,  $F_3 = 2 > 1 = F_2$ . Supposons que pour tout  $k$  vérifiant  $2 \leq k \leq n$ , on ait  $F_{k+1} > F_k$ . Alors

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n > F_{n+1}.$$

Donc  $F_{n+2} > F_{n+1}$  et la suite est strictement croissante à partir de  $n = 2$ . □

## 2.2 Encadrement grossier : croissance exponentielle

### Proposition 2.3 : Croissance exponentielle grossière

Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$F_n \leq 2^n.$$

*Démonstration.* Par récurrence.

*Initialisation :*

$$F_1 = 1 \leq 2^1 = 2, \quad F_2 = 1 \leq 2^2 = 4.$$

*Hérédité :* supposons que pour un certain  $n \geq 1$ , on ait  $F_n \leq 2^n$  et  $F_{n+1} \leq 2^{n+1}$ . Alors

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \leq 2^{n+1} + 2^n = 2^n(2 + 1) = 3 \cdot 2^n \leq 2^{n+2}$$

puisque  $3 \leq 4$ . La propriété est donc vraie pour tout  $n \geq 1$ . □

## 3 Expression explicite : formule de Binet

La suite de Fibonacci vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0.$$

### 3.1 Équation caractéristique

On recherche une solution de la forme  $F_n = r^n$  pour un certain nombre réel (ou complexe)  $r$ . On obtient :

$$r^{n+2} - r^{n+1} - r^n = 0 \iff r^n(r^2 - r - 1) = 0.$$

On cherche donc les racines de l'équation *caractéristique*

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5.$$

Les racines sont donc

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

On note en général

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{nombre d'or}) \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

### 3.2 Forme générale des solutions

#### Proposition 3.1 : Forme générale

Toute suite  $(u_n)$  vérifiant

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

est de la forme

$$u_n = A\varphi^n + B\psi^n$$

où  $A, B \in \mathbb{R}$  sont deux constantes déterminées par les conditions initiales.

*Idée de la preuve.* L'espace des solutions de cette relation de récurrence est un espace vectoriel de dimension 2, engendré par les suites  $(\varphi^n)$  et  $(\psi^n)$  qui sont linéairement indépendantes. Toute solution est donc combinaison linéaire de ces deux suites.  $\square$

Appliquons ceci à la suite de Fibonacci.

### 3.3 Formule de Binet

#### Théorème 3.1 : Formule de Binet

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \psi^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

#### Remarque

On a  $|\psi| = \left| \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right| < 1$ , donc  $\psi^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Cela permet d'obtenir une approximation simple de  $F_n$  pour  $n$  grand :

$$F_n \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

## 4 Rapport de deux termes consécutifs et nombre d'or

### 4.1 Limite du rapport $\frac{F_{n+1}}{F_n}$

#### Théorème 4.1 : Limite du rapport

La suite  $\left( \frac{F_{n+1}}{F_n} \right)_{n \geq 1}$  converge et sa limite est le nombre d'or  $\varphi$ .

*Preuve (avec Binet).* À partir de la formule de Binet, on a pour tout  $n \geq 1$  :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^{n+1} - \psi^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \psi^n)} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n}.$$

On factorise :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^n \left( \varphi - \left( \frac{\psi}{\varphi} \right)^{n+1} \right)}{\varphi^n \left( 1 - \left( \frac{\psi}{\varphi} \right)^n \right)} = \frac{\varphi - \left( \frac{\psi}{\varphi} \right)^{n+1}}{1 - \left( \frac{\psi}{\varphi} \right)^n}.$$

Or  $|\psi| < \varphi$  donc  $\left| \frac{\psi}{\varphi} \right| < 1$  et ainsi

$$\left( \frac{\psi}{\varphi} \right)^n \rightarrow 0.$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi - 0}{1 - 0} = \varphi.$$

$\square$

## 4.2 Caractérisation de $\varphi$

On peut remarquer que  $\varphi$  est la seule solution positive de

$$x^2 = x + 1 \iff x = 1 + \frac{1}{x}.$$

On peut voir la convergence précédente comme le fait que le rapport de deux termes successifs d'une suite vérifiant  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  se stabilise sur la solution de l'équation *limite* :

$$\ell = 1 + \frac{1}{\ell} \implies \ell^2 - \ell - 1 = 0.$$

## 5 Identités classiques de Fibonacci

### 5.1 Formule d'addition

#### **Théorème 5.1 : Formule d'addition**

Pour tous entiers  $m, n \geq 0$  :

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1},$$

avec la convention  $F_{-1} = 1$  (ce qui se justifie par prolongement de la récurrence).

*Preuve par récurrence sur  $n$  (schéma).* Pour un  $m$  fixé, on montre par récurrence sur  $n$  que la formule est vraie.

*Initialisation :* pour  $n = 0$  :

$$F_{m+0} = F_m, \quad F_{m-1}F_0 + F_mF_1 = F_{m-1} \cdot 0 + F_m \cdot 1 = F_m.$$

Donc la formule est vraie pour  $n = 0$ .

*Hérédité :* on suppose vraie la formule pour  $n$  et  $n+1$ , on la démontre pour  $n+2$  en utilisant la relation de récurrence de Fibonacci et l'hypothèse de récurrence. (Les détails sont laissés au lecteur.)

Cela établit la formule. □

### 5.2 Somme des $n$ premiers termes

#### **Théorème 5.2 : Somme des premiers termes**

Pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1.$$

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n$ .

*Initialisation :* pour  $n = 0$ ,

$$\sum_{k=0}^0 F_k = F_0 = 0, \quad \text{et} \quad F_2 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Donc c'est vrai pour  $n = 0$ .

*Hérédité :* Supposons la formule vraie pour un certain  $n \geq 0$ , c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1.$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_k = \left( \sum_{k=0}^n F_k \right) + F_{n+1} = (F_{n+2} - 1) + F_{n+1} = F_{n+2} + F_{n+1} - 1 = F_{n+3} - 1.$$

La formule reste donc vraie pour  $n + 1$ . Par récurrence, elle est vraie pour tout  $n \geq 0$ .  $\square$

### 5.3 Identité de Cassini

#### **Théorème 5.3 : Identité de Cassini**

Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

*Preuve par récurrence. Initialisation :* pour  $n = 1$ ,

$$F_2F_0 - F_1^2 = 1 \cdot 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1.$$

Donc la formule est vraie pour  $n = 1$ .

*Hérédité :* Supposons la formule vraie pour un certain  $n \geq 1$ ,

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

On veut montrer

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

On utilise la récurrence  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  :

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 = F_{n+1}F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2.$$

Avec quelques manipulations algébriques supplémentaires (laissé en exercice), on retrouve  $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$ , ce qui conclut.  $\square$

## 6 Interprétations combinatoires

### 6.1 Mots binaires sans deux 1 consécutifs

#### **Définition 6.1 : Mots binaires restreints**

On considère les mots de longueur  $n$  sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  sans deux symboles 1 consécutifs. On note  $a_n$  le nombre de tels mots.

#### **Théorème 6.1 : Lien avec Fibonacci**

Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$a_n = F_{n+2}.$$

*Idée de la preuve.* On construit une relation de récurrence sur  $a_n$ .

Un mot de longueur  $n$  sans deux 1 consécutifs commence soit par 0, soit par 1.

- S'il commence par 0, il reste  $n - 1$  positions à remplir avec un mot de longueur  $n - 1$  sans deux 1 consécutifs : il y a donc  $a_{n-1}$  possibilités.
- S'il commence par 1, la lettre suivante doit être 0 pour éviter deux 1 consécutifs. Il reste alors  $n - 2$  positions, obtenues par un mot de longueur  $n - 2$  sans deux 1 consécutifs : il y a donc  $a_{n-2}$  possibilités.

Ainsi,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

avec des conditions initiales  $a_1 = 2$  (mots : 0,1) et  $a_2 = 3$  (00,01,10).

On reconnaît la récurrence de Fibonacci. On vérifie que

$$a_1 = 2 = F_3, \quad a_2 = 3 = F_4,$$

et par récurrence on obtient  $a_n = F_{n+2}$  pour tout  $n$ . □

## 6.2 Carrelages d'un segment

### Définition 6.2 : Pavages par carrés et dominos

On considère un segment de longueur  $n$  décomposé en  $n$  cases consécutives. On veut le paver avec :

- des *carrés* de longueur 1,
- des *dominos* de longueur 2.

On cherche le nombre  $b_n$  de pavages possibles.

### Théorème 6.2 : Lien avec Fibonacci

Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$b_n = F_{n+1}.$$

*Idée de la preuve.* On raisonne encore par récurrence.

- Pour  $n = 1$ , il n'y a qu'un pavage possible : un carré. Donc  $b_1 = 1 = F_2$ .
- Pour  $n = 2$ , les pavages possibles sont (carré,carré) ou (domino), donc  $b_2 = 2 = F_3$ .
- Pour  $n \geq 3$ , examinons la première case :
  - Si la première case est un carré, il reste  $n - 1$  cases, avec  $b_{n-1}$  pavages.
  - Si la première case est le début d'un domino, il occupe les deux premières cases, il reste  $n - 2$  cases, avec  $b_{n-2}$  pavages.

Donc

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}.$$

On reconnaît encore la récurrence de Fibonacci. Avec les conditions initiales précédentes, on vérifie que  $b_n = F_{n+1}$ . □

## 7 Fonction génératrice

### 7.1 Définition

#### Définition 7.1 : Fonction génératrice

On définit la **fonction génératrice** de la suite de Fibonacci par

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Cette série formelle est un outil puissant pour retrouver des propriétés de la suite.

## 7.2 Calcul de la fonction génératrice

On utilise la relation de récurrence  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .

On considère :

$$G(x) = F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \dots$$

On calcule  $xG(x)$  et  $x^2G(x)$  :

$$xG(x) = F_0x + F_1x^2 + F_2x^3 + F_3x^4 + \dots,$$

$$x^2G(x) = F_0x^2 + F_1x^3 + F_2x^4 + \dots.$$

Considérons

$$G(x) - xG(x) - x^2G(x).$$

On a

$$G(x) - xG(x) - x^2G(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + \sum_{n \geq 2} (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n.$$

Or la relation de récurrence équivaut à

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0 \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Ainsi,

$$G(x) - xG(x) - x^2G(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x = 0 + (1 - 0)x = x.$$

On factorise  $G(x)$  :

$$G(x)(1 - x - x^2) = x.$$

On obtient donc :

### **Théorème 7.1 : Fonction génératrice**

La fonction génératrice de la suite de Fibonacci est donnée par

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

## 8 Représentation matricielle

### 8.1 Formulation matricielle

#### **Proposition 8.1 : Forme matricielle**

Pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on en déduit :

#### **Théorème 8.1 : Puissance de la matrice de Fibonacci**

Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette représentation permet des calculs rapides de  $F_n$  à l'aide d'algorithmes d'exponentiation rapide de matrices.

## 9 Exercices proposés

### Exercice 9.1 : Récurrence simple

Montrer par récurrence que pour tout  $n \geq 0$ ,

$$F_{n+1} \geq F_n.$$

### Exercice 9.2 : Encadrements

Montrer qu'il existe deux constantes  $c_1, c_2 > 0$  telles que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$c_1\varphi^n \leq F_n \leq c_2\varphi^n.$$

*Indication* : utilisez la formule de Binet et le fait que  $|\psi| < 1$ .

### Exercice 9.3 : Somme des carrés

Montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

### Exercice 9.4 : Interprétation combinatoire

Retrouver la formule de la somme

$$\sum_{k=0}^n F_k$$

en utilisant les pavages par des dominos et des carrés (interprétation combinatoire).

### Exercice 9.5 : Fonction génératrice

En partant de la fonction génératrice

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2},$$

retrouver la formule de Binet à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

### Exercice 9.6 : Généralisation

Considérons une suite  $(u_n)$  définie par

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad u_0 = a, \quad u_1 = b.$$

- Exprimer  $u_n$  en fonction de  $a, b, F_n, F_{n+1}$ .
- Retrouver l'expression de  $u_n$  à l'aide de la formule générale  $u_n = A\varphi^n + B\psi^n$ .

## Conclusion

La suite de Fibonacci est un exemple fondamental de suite récurrente linéaire d'ordre 2. Elle illustre notamment :

- la résolution de relations de récurrence,
- l'utilisation des fonctions génératrices,

- les liens entre suites, nombres complexes et diagonalisation de matrices,
- l'apparition naturelle de suites en combinatoire et en géométrie (nombre d'or).

Elle constitue une excellente porte d'entrée vers des domaines plus avancés tels que la théorie des nombres, les systèmes dynamiques et la combinatoire analytique.