

# Introduction à la théorie de graphes

**Exposé présenté par :**

**Achak Abderrahmane, Nafie Jamal**

**Sous l'encadrement de Prof. Abdelouahhab Beddaa**

Centre de Formation des Inspecteurs de l'Enseignement - Rabat



18 mai 2019

# Sommaire

- 1 Un peu d'histoire
  - Euler et les ponts de Königsberg
  - Le problème du cavalier sur un échiquier
- 2 Aujourd'hui
  - Remarque préliminaire
  - Utilités des graphes
  - Définitions
  - Connexité ( quelques résultats)

# Sommaire

- 1 Un peu d'histoire
  - Euler et les ponts de Königsberg
  - Le problème du cavalier sur un échiquier
  
- 2 Aujourd'hui
  - Remarque préliminaire
  - Utilités des graphes
  - Définitions
  - Connexité ( quelques résultats)

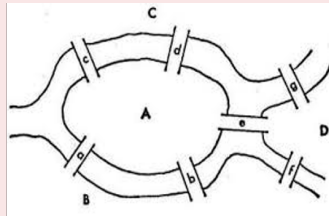
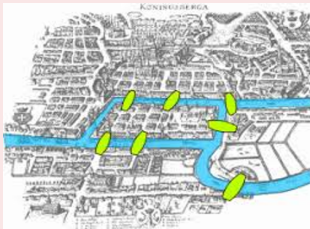


# I) Un peu d'histoire

## 1) Euler et les ponts de Königsberg

### Les ponts de Königsberg

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles. , les bras de la rivière sont traversés par 7 ponts : a, b, c, d, e, f et g.



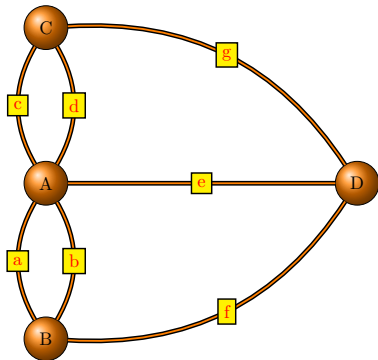


FIGURE 2 – Comme on peut le voir sur la figure, les points A et D représentent les deux îles, les deux autres B et C représentent les deux rives (les deux parties de la ville) et les liaisons sont les ponts : a, b, c, d, e, f et g.

## Le problème des ponts de Königsberg

Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.

Une telle promenade n'existe pas, et c'est Euler qui donna la solution de ce problème à l'aide d'un schéma « GRAPHE » qui porte aujourd'hui le nom de « Graphe Eulérien » en référence à l'illustre mathématicien en se basant sur un théorème (Qu'on va traiter dans la partie :Connexité) dont la démonstration rigoureuse ne fut en fait publiée qu'en 1873, par Carl Hierholzer (1840-1871).

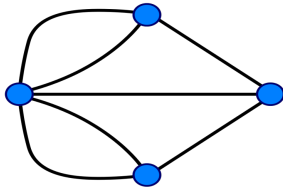


FIGURE 3 – Schéma/Graphe utilisé par Euler (1707-1783)

La modélisation de ce problème (graphe de Figure 3) a l'intérêt de se généraliser, **c'est l'un des points de départ de la théorie des graphes**. Pour que l'on puisse faire une promenade ramenant le promeneur au point de départ, il faudrait que le nombre de ponts pour chaque île et chaque rive soit pair.

Si on enlève la contrainte de revenir au point de départ, il faudrait que deux des sommets au plus (le départ et l'arrivée) aient un nombre impair de ponts. Le problème des sept ponts de Königsberg est l'exemple type de graphe eulérien.

## 2) Le problème du cavalier sur un échiquier

### Le problème du cavalier sur un échiquier

Le problème du cavalier (ou encore polygraphie ou algorithme du cavalier ou cavalier d'Euler) est un problème mathématico-logique fondé sur les déplacements du cavalier du jeu d'échecs (une case partageant un côté commun puis une case en diagonale dans la même direction). Un cavalier posé sur une case quelconque d'un échiquier doit en visiter toutes les cases sans passer deux fois sur la même.

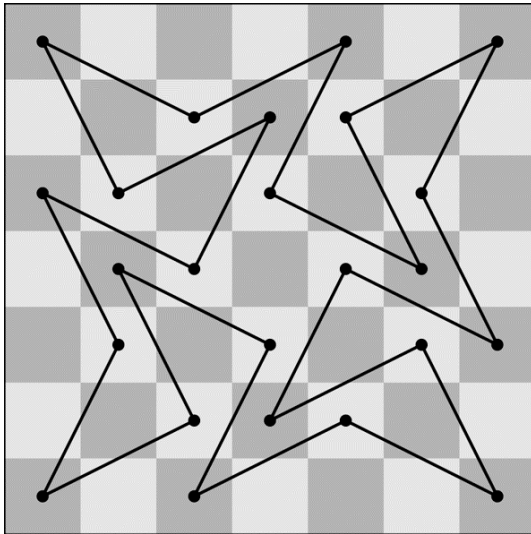


FIGURE 4 – Exemple de déplacement sur un échiquier de taille 49

Le cavalier d'Euler est connu depuis fort longtemps. Vers l'année 840, le joueur et théoricien d'échecs arabe al-Adli ar-Rumi<sup>1</sup> en donne déjà une solution. Depuis lors, plusieurs solutions ont été apporté à ce problème. Le mathématicien Leonhard Euler reprit l'étude scientifique en 1759. La « Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse » n'est cependant publiée qu'en 1766.

En théorie des graphes, La recherche d'un tour du cavalier est un cas particulier de ce qu'on appelle aujourd'hui «graphes hamiltoniens».

---

1. Sous le règne d'Al-Watiq et au début du règne du calife Al-Mutawakkil, il était reconnu comme le meilleur joueur du IX<sup>e</sup> siècle jusqu'à sa défaite contre Al-Razi qui eut lieu suivant les sources soit avant, soit pendant le règne d'Al Mutawakkil (847-861)

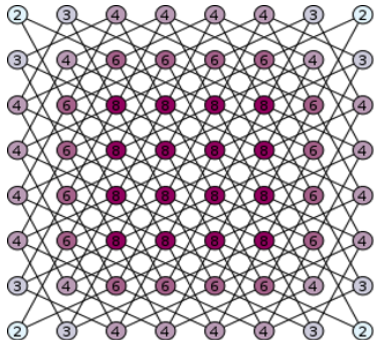


FIGURE 5 – Graphe «Hamiltonien» du cavalier : En mathématiques, dans le cadre de la théorie des graphes, un graphe hamiltonien est un graphe dont on peut passer par tous les sommets une fois et une seule

## II) Aujourd'hui

La théorie des graphes est, avec la combinatoire, une des pierres angulaires de ce qu'il est commun de désigner par mathématiques discrètes. Cependant, elle n'a reçu qu'assez tardivement une attention soutenue de la part de la communauté mathématique. En effet, bien que les graphes eulériens soient l'émanation du célèbre problème des sept ponts de Königsberg étudié par Euler en 1736, on peut dire que les premiers développements majeurs de la théorie des graphes datent du milieu du vingtième siècle (N. Biggs, C. Berge, W.T. Tutte, . . . ). Ainsi, un des premiers ouvrages, si pas le premier, traitant de théorie des graphes « Théorie der endlichen und unendlichen Graphen » (théorie des graphes finis et infinis) écrit par König remonte à 1936. Depuis cette époque, la théorie des graphes s'est largement développée et fait à présent partie du cursus Standard en mathématiques de bon nombre d'universités et de lycée (Notamment en France, Bac ES).

# 1) Remarque préliminaire

## Remarque préliminaire :

**Le but de cet exposé est de partager avec vous cet axe qui n'est pas encore enseigné chez nous au Maroc. Nous allons seulement insister – pour but d'initiation- sur les définitions de bases, sur les théorèmes élémentaires avec des applications faciles et similaires à celles qu'on fait en combinatoire en se limitant aux graphes finis. Tout en espérant à mettre au moins -Ceux de nos collègues qui n'ont jamais fait face à ce domaine- sur les rails des lectures et recherches futurs. Car introduire une nouvelle matière n'est pas toujours chose plaisante, il s'agit souvent d'une accumulation de définitions ! Et c'est hélas la situation rencontrée ici. Nous allons faire le mieux possible pour résumer sans affecter l'essentiel !**

## 2) Utilités des graphes

Les graphes modélisent de nombreuses situations concrètes où interviennent des objets en interaction. Les interconnexions routière, ferroviaire ou aériennes entre différentes agglomérations, les liens entre les composants d'un circuit électronique, le plan d'une ville et de ses rues en sens unique, ...

Les graphes permettent de manipuler plus facilement des objets et leurs relations avec une représentation graphique naturelle.

L'ensemble des techniques et outils mathématiques mis au point en Théorie des Graphes permettent de démontrer facilement des propriétés, d'en déduire des méthodes de résolution, des algorithmes, ...

- ❑ Quel est le plus court chemin (en distance ou en temps) pour se rendre d'une ville à une autre ?
- ❑ Comment minimiser la longueur totale des connexions d'un circuit ?
- ❑ Peut-on mettre une rue en sens unique sans rendre impossible la circulation en ville ? .....

## 3) Définitions

### Définition 1

Un graphe  $G$  (fini) est un couple  $(V, E)$  où  $V$  est un ensemble (fini) d'objets et  $E$  est sous-ensemble de  $V \times V$ .

- ❑ Les éléments de  $V$  sont appelés les sommets du graphe.
- ❑ Les éléments de  $E$  sont appelés les arêtes du graphe.
- ❑ Une arête  $e$  du graphe est une paire  $e = (x, y)$  de sommets. Les sommets  $x$  et  $y$  sont Les extrémités de l'arête.

# Exemples

□ Premier exemple :

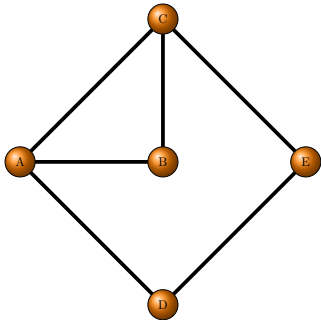


FIGURE 6 – L'ensemble des sommets :

$$V = \{A, B, C, D, E\}$$

Les arêtes sont :  $(A,B)$ ,  $(A,C)$ ,  
 $(A,D)$ ,  $(B,C)$ ,  $(D,E)$ ,  $(C,E)$

Dans cet exemple, on a considéré qu'une arête  $e = (x, y)$  est la même que  $(y, x)$ . On dit que le graphe **n'est pas orienté**

## □ Deuxième exemple :

Dans une ville, se trouvent trois maisons : A, B, C et trois usines : Eau, Gaz, Électricité. Chaque maison doit être reliée à chaque usine par une conduite. On aimerait réaliser ces raccordements sans que deux conduites ne se croisent.

- Dans notre exemple :  $V = \{ \text{Eau, Gaz, Électricité, A, B, C} \}$ .
- Pour un possible raccordement on peut donner :  
 $E = \{ (\text{Eau, C}); (\text{Gaz, B}); (\text{Gaz, C}); (\text{Élec, A}); (\text{Eau, A}); (\text{Gaz, A}) \}$
- Les éléments de  $V$  représentent les sommets du graphe. Les couples de  $E$  sont les arêtes du graphe.
- Dans l'ensembles  $E$  on n'a pas tenu compte des couples  $(P_j; P_i)$  « l'autre sens ». On a considéré que  $(P_i; P_j)$  et  $(P_j; P_i)$  représentent la même arête. Car « Raccorder une maison avec une usine » n'exige aucune orientation. Donc le graphe n'est pas orienté.

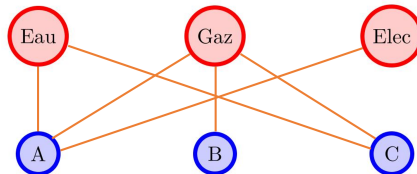
- De plus on remarque qu'on a pas d'arête de la forme  $(P_i; P_i)$ , on dit alors que notre graphe est **sans boucle**.

## Définition 2 : Graphe simple

Un graphe fini  $G = (V, E)$  est dit simple s'il est sans boucle et que pour tout  $x, y \in V$ , les sommets  $x$  et  $y$  sont reliés par au plus une arête

Dans l'exposé on parlera généralement que des graphes simples.

- Exemple** : Graphe simple d'un raccordement lié à l'exemple (la réponse sera donnée dans la suite).



## Définition 3

- ❑ Nous dirons qu'un graphe est d'ordre  $n$  s'il comporte  $n$  sommets.
- ❑ Un graphe complet est un graphe simple dont tous les sommets sont adjacents, c'est-à-dire que tout couple de sommets disjoints est relié par une arête.
- ❑ Le degré d'un sommet  $x$  de  $G$  est le nombre d'arêtes incidentes à  $x$ . Il est noté  $d(x)$ .
- ❑ Un sommet de degré 0 est dit isolé : il n'est relié à aucun autre sommet.

## Remarques

- ❑ Pour un graphe simple d'ordre  $n$ , le degré d'un sommet est un entier compris entre 0 et  $n - 1$ .
- ❑ Pour un graphe complet d'ordre  $n$ , le degré d'un sommet est exactement  $n - 1$ .

# Exemples

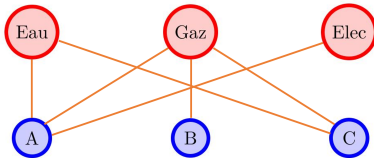


FIGURE 7 – Le graphe n'est pas complet, car par exemple A et B ne sont pas adjacents.

$$d(A) = d(\text{Gaz}) = 3, \quad d(C) = d(\text{Eau}) = 2, \\ d(B) = d(\text{Elec}) = 1$$

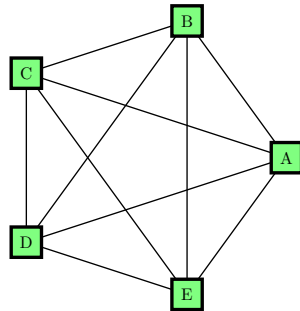


FIGURE 8 – Le graphe est complet d'ordre 5. Le degré de tout sommet est égale à 4

## Propriété 1 (Lemme des "poignées de main")

Pour tout Graphe  $G = (V, E)$  fini, on a :

$$\sum_{A \in V} d(A) = 2 \text{Card}(E)$$

Chaque arête relie deux sommets du graphe. Donc elle est comptée exactement deux fois dans la somme de gauche.

## Conséquence

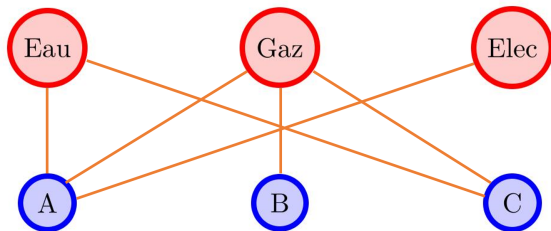
Le nombre de sommets de degré impair (Dans un graphe simple) est pair.

**Preuve** : l'ensemble  $I$  de sommets de degré impair et  $P$  celui des sommets de degré pair forment une partition de  $V$ , donc :

$$\sum_{A \in V} d(A) = \sum_{A \in I} d(A) + \sum_{A \in P} d(A) = 2 \text{Card}(E)$$

Mais  $\sum_{A \in P} d(A)$  est pair, donc  $\sum_{A \in I} d(A)$  est pair. Par suite  $Card(I)$  est pair.

**Exemple :**



□  $Card(E) = 6$

$$\begin{aligned} \sum_{A \in V} d(A) &= d(A) + d(Gaz) + d(C) + d(Eau) + d(B) + d(Elec) \\ &= 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 2 \times 6 \end{aligned}$$

□ Le nombre de sommets de degré impair est 4

# Applications

## Exercice 1

Avez-vous jamais remarqué que dans un groupe de personnes, il y a toujours deux individus qui connaissent exactement le même nombre de membres du groupe ?

- 1 Formaliser la propriété à démontrer dans le vocabulaire des graphes.
- 2 Démontrer cette propriété (on pourra raisonner par l'absurde et supposer que la propriété à prouver n'est pas vraie pour un graphe à  $n$  sommets).

**Solution :** 1. On doit prouver que dans un graphe simple (sans arête double, sans boucle), il y a toujours deux sommets qui ont le même degré.

2. On va raisonner par l'absurde et supposer qu'il y a un graphe simple à  $n$  sommets dont tous les degrés sont différents.

Alors les degrés des sommets sont compris entre 0 et  $n-1$ , et donc si tous les degrés sont différents, comme on a  $n$  sommets et simplement  $n$  possibilités pour les degrés, toutes ces possibilités doivent être prises. En particulier, il doit y avoir un sommet de degré 0 et un sommet de degré  $n-1$ . Mais c'est impossible, car ce dernier sommet devrait avoir une arête vers tous les autres, et ce n'est pas possible puisqu'un sommet est de degré 0, donc isolé.

## Exercice 2

Un graphe est dit régulier s'il est simple et si tous ses sommets ont le même degré. On s'intéresse dans cet exercice aux graphes réguliers dont les sommets sont de degré 3.

- 1 Que dire du nombre de sommets d'un tel graphe ?
- 2 Démontrer que, pour tout  $p \geq 2$ , il existe un graphe régulier d'ordre  $2p$  dont les sommets sont de degré 3.

**Solution :** 1. Le nombre de sommets est supérieur ou égal à 4 (chaque sommet est relié à 3 autres). De plus, le nombre de sommets doit être pair. En effet, on part de l'équation

$$\sum_{A \in V} d(A) = 2m$$
 où  $m$  est le nombre d'arêtes. Si  $n$  est le nombre de

sommets du graphe, on obtient  $3n = 2m$ , ce qui impose  $n$  pair.

2. D'abord pour  $p = 2$ , le résultat est vrai : il suffit de considérer le graphe complet à 4 sommets. Pour  $p \geq 3$ , on partage l'ensemble des sommets en 2, d'une part  $\{a_1, \dots, a_p\}$ , d'autre part  $\{a_{p+1}, \dots, a_{2p}\}$ . Les arêtes sont les suivantes :

$a_1$  est relié à  $a_{p+1}, a_{p+2}$  et  $a_{p+3}$

$a_2$  est relié à  $a_{p+2}, a_{p+3}$  et  $a_{p+4}$

...

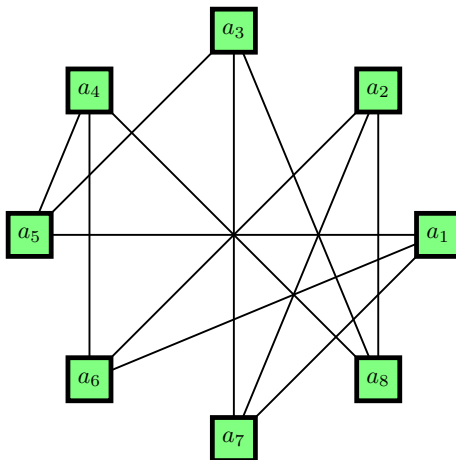
$a_{p-2}$  est relié à  $a_{2p-2}, a_{2p-1}$  et  $a_{2p}$

$a_{p-1}$  est relié à  $a_{2p-1}, a_{2p}$  et  $a_{p+1}$

$a_p$  est relié à  $a_{2p}, a_{p+1}$  et  $a_{p+2}$

On obtient bien un graphe d'ordre  $2p$  dont tous les sommets sont de degré 3.

**Exemple :** Si  $p = 4$ , voici un graphe régulier dont les sommets sont de degré 3 et d'ordre 8 construit de la même façon.



## 4) Connexité ( quelques résultats)

### Définitions(chaîne - cycle)

- ❑ Si  $A$  et  $B$  sont deux sommets d'un graphe, un **chemin (ou chaîne)** de  $A$  à  $B$  est une suite d'arêtes  $(M_i, M_{i+1})$  pour  $i = 1, \dots, k - 1$  où  $A = M_1$  et  $B = M_k$ .
- ❑ Le nombre d'arêtes qui compose un chemin (une chaîne) est appelé la longueur du chemin. On convient qu'un sommet est toujours lié à lui-même par un chemin de longueur nulle.
- ❑ Un cycle est une chaîne fermée (c'est à dire l'origine et l'extrémité sont identiques) dont toutes les arêtes sont distinctes.

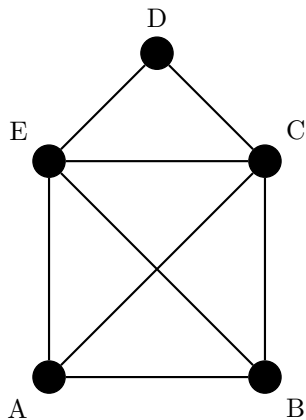


FIGURE 9 –  $\square$  ABCD et ABCAED sont des chaînes de longueurs resp 3 et 5  
 $\square$  ABECBA est une chaîne fermée mais n'est pas un cycle  
 $\square$  ABCEA, ABECA, ACEBA et ABCDEA sont des cycles

## Définitions (chaîne eulérienne, cycle eulérien, graphe eulérien)

contenu...

- Une chaîne eulérienne est une chaîne qui contient une fois et une seule chacune des arêtes du graphe. Si cette chaîne est un cycle, on parle de cycle eulérien.
- Un graphe eulérien est un graphe qui possède un cycle eulérien.

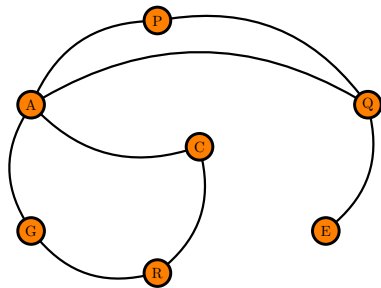


FIGURE 10 – □

QAGRCAPQE est une chaîne  
eulérienne

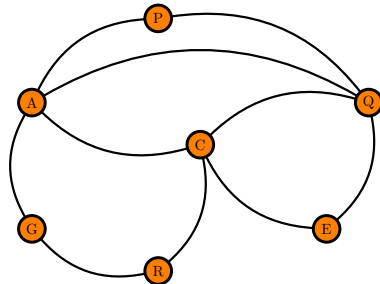


FIGURE 11 – □ QAGRCAPQE est un  
cycle eulérien. Donc le graphe est eulérien.

## Définition (graphe connexe)

Un graphe est dit connexe lorsque deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaîne.

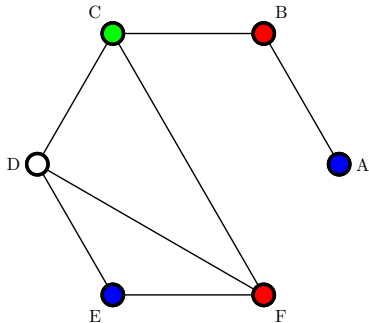


FIGURE 12 – □ Graphe connexe

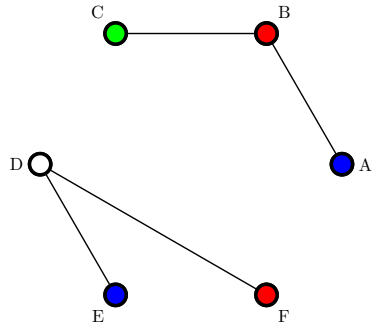
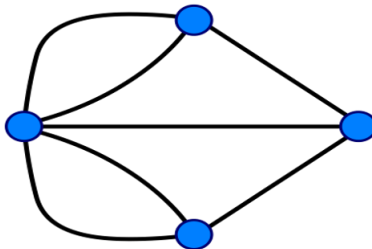


FIGURE 13 – □ Graphe non connexe

Exemple : Tout graphe complet est connexe. En particulier, le graphe d'Euler (des ponts) est un graphe connexe.



### Propriété

Tout graphe connexe d'ordre  $n$ , possède au moins  $(n - 1)$  arêtes.

**Démonstration** : par récurrence sur  $n$  : Pour  $n = 1$  ou  $2$  le résultat est évident. Soit  $n$  un entier fixé. On suppose que tout graphe connexe d'ordre  $n$ , possède au moins  $(n - 1)$  arêtes.

Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n+1$  et  $a$  le nombre d'arêtes de  $G$ . Notons que la connexité assure que chaque sommet est au moins de degré 1.

⇒ Si chaque sommet est au moins de degré 2, alors on aura :

$$2a = \sum_{S \in V} \deg(S) \geq 2n \implies a \geq n$$

Donc  $G$  a au moins  $n$  arêtes.

⇒ S'il existe un sommet de degré 1, noté  $S$ , alors le sous graphe  $G'$  de  $G$  obtenu en éliminant  $S$  et l'arête incidente de  $S$  est un graphe connexe d'ordre  $n$  avec une arête de moins par rapport à  $G$ . Et d'après l'hypothèse de récurrence,  $G'$  possède au moins  $(n - 1)$  arêtes. D'où  $G$  possède au moins  $n$  arêtes, ce qui achève la démonstration.

## Propriété

Soit  $G$  un graphe dont tous les sommets sont de degré pair. Alors  $G$  est une partition de cycles.

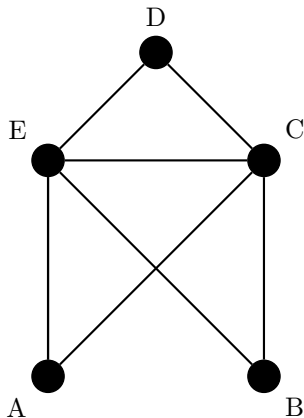


FIGURE 14 -

□  $G = C_1 \cup C_2$  avec  $C_1 = BCDEB$  et  $C_2 = ACEA$  et  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$

□  $G = C_3 \cup C_4$  avec  $C_3 = ACDEA$  et  $C_4 = BECB$  et  $C_3 \cap C_4 = \emptyset$

## Démonstration :

Soit  $G$  un graphe dont tous les sommets sont de degré pair. Un premier cycle de  $G$  est obtenu en partant d'un sommet  $S$  et en parcourant différentes arêtes sans les retraverser. Chaque sommet étant de degré pair, il est possible, lorsqu'on entre dans un sommet via une arête, de le quitter par l'intermédiaire d'une autre arête. Puisque  $G$  contient un nombre fini  $n$  d'arêtes, nous devons nécessairement rencontrer une arête  $R$  qui a déjà été traversée. Les arêtes du chemin obtenu entre les deux occurrences de  $R$  forment un premier cycle  $C_1$ . Supprimons alors de  $G$  les arêtes de  $C_1$ . On obtient alors un graphe  $H$ , éventuellement non connexe, constitué de sommets de degré pair. Si  $H$  contient des arêtes (c'est-à-dire si  $G$  et  $C_1$  sont distincts), on peut reproduire avec  $H$  la démarche précédente pour obtenir un cycle  $C_2$  n'ayant aucune arête commune avec  $C_1$ . Il suffit de continuer ainsi jusqu'à ce qu'il ne reste plus d'arête.

Les cycles obtenus contiennent chaque arête de  $G$  et deux quelconques d'entre eux n'ont aucune arête en commun.

### Théorème d'Euler

Un graphe connexe  $G$  admet un cycle eulérien si et seulement si chaque sommet de  $G$  est de degré pair.

#### Démonstration :

- Montrons tout d'abord que si  $G$  admet un cycle eulérien, alors chaque sommet de  $G$  est de degré pair.

Si  $G$  admet un cycle eulérien, alors chaque arête incidente à un sommet  $S$  ajoute 2 au degré de  $S$ . Puisque chaque arête est traversée une seule fois, le degré de chaque sommet est une somme de 2, c'est-à-dire un nombre pair.

- Montrons maintenant que si  $G$  est un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair, alors  $G$  admet un cycle eulérien.

D'après la propriété démontrée précédemment,  $G$  est une partition de cycles, deux quelconques d'entre eux n'ayant aucune arête en commun. Considérons l'un de ces cycles  $C_1$ . Si  $C_1$  contient toutes les arêtes de  $G$ , alors  $C_1$  est le cycle eulérien de  $G$ . Sinon, partant d'un sommet quelconque de  $C_1$ , on parcourt  $C_1$  jusqu'à rencontrer un sommet appartenant à un second cycle  $C_2$  (ce sommet existe puisque  $G$  est supposé connexe).  $C_2$  est parcouru, puis  $C_1$ .

Si cette chaîne contient toutes les arêtes de  $G$ , on obtient le cycle eulérien de  $G$ . Sinon, on parcourt cette chaîne jusqu'à rencontrer un sommet d'un cycle  $C_3$ .

Puisque  $G$  est connexe, ce cycle existe. En procédant ainsi jusqu'à ce que tous les cycles de  $G$  aient été parcourus,

on obtient une chaîne dont les deux extrémités sont confondues et telle que chaque arête a été visitée une fois et une seule, ce qui montre que  $G$  admet un cycle eulérien.

**Conséquence** : Solution du problème des sept ponts de Königsberg.

Le graphe d'Euler étant connexe. On remarque que les quatre sommets sont de degré impair, donc il n'existe pas de cycle Eulérien et par suite la promenade souhaitée est impossible.

